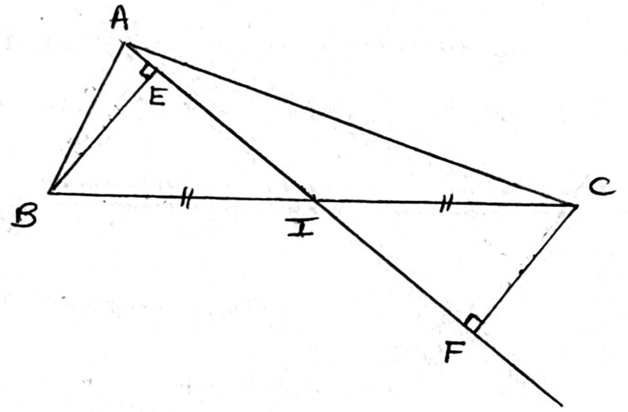
FIGURES & TRANSFORMATIONS

~

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Démontrer que la médiane (AI) d'un triangle ABC partage ce triangle en 2 triangles de même aire.



1- méthode : Soient E et F les projetés orth. de B et C sur (AI). Soit s la symétrie / à I.

s(B) = C et tout revient à prouver que s(E) = F, ce qui entraînera BE = CF et

$$\text{Aire de } ABI = \frac{AI \times BE}{2} = \frac{AI \times CF}{2} = \text{Aire de } ACI$$

E appartient à la perp. à (AI) passant par B, donc s(E) appartiendra à la perp. à s((AI)) = (AI) passant par s(B) = C, soit

$$s(E) \in (CF)$$

Comme par ailleurs s(E) ∈ (AI) est trivial, on aura nécessairement s(E) = F CQFD

2- méthode : Il faut prouver que

$$S_{ABI} = S_{ACI}$$

où $S_{ABI} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AI}\|$ et $S_{ACI} = \|\vec{AI} \wedge \vec{AC}\|$

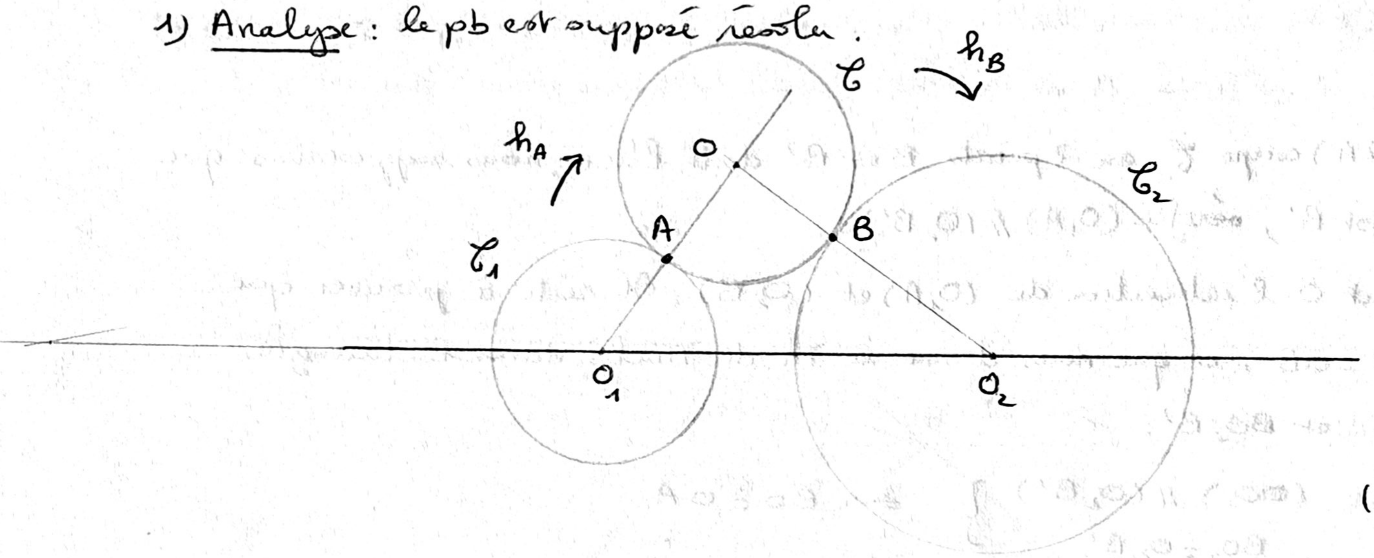
Il suffit de constater : $\vec{AB} \wedge \vec{AI} = \vec{IB} \wedge \vec{AI}$

$\vec{AI} \wedge \vec{AC} = \vec{AI} \wedge \vec{IC} = \vec{IB} \wedge \vec{AI}$ CQFD

Pb de construction d'un cercle tangent à 2 autres (...)

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont 2 cercles de centres O_1 et O_2 distincts, de rayons R_1 et R_2 distincts.
A est un point donné de $\mathcal{C}_1$ n'appartenant pas à la droite (O_1O_2).
Comment construire un cercle $\mathcal{C}$ tangent en A à $\mathcal{C}_1$ et tangent à $\mathcal{C}_2$?

1) Analyse : le pb est supposé résolu.



(fig 1)

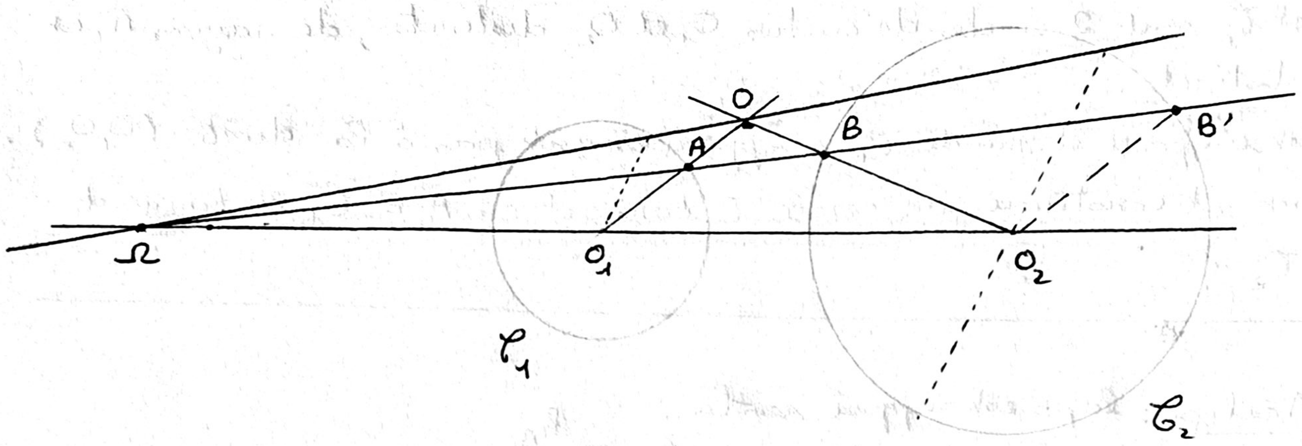
Soient h_A l'homothétie de centre A transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}$
h_B " " B " $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_2$

$h \doteq h_B \circ h_A$ est une homothétie-translation de rapport $R_1R_2 \neq 1$, donc une homothétie de centre $\Omega \in (AB)$. Elle transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$: on sait qu'il existe 2 telles homothéties, et on sait trouver leurs centres.
Connaissant Ω et A, il suffira de prolonger (ΩA) et de placer B à l'intersection de (ΩA) et $\mathcal{C}_2$ ...

2) Synthèse :

Soit Ω le centre d'une des homothéties h qui transforme le cercle $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. (fig. 2)

(Transmath TC 87 t2, p189 en ex. résolu)



(ΩA) coupe $\mathcal{C}_2$ en 2 points B et B' dont l'un, nous supposerons que c'est B', vérifie $(O_1A) \parallel (O_2B')$.

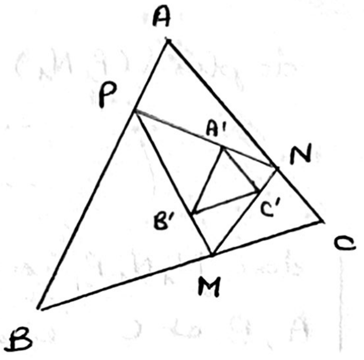
Soit O l'intersection de (O_1A) et (O_2B). Il reste à prouver que $OA = OB$, ce que nous donne le Th. de Thalès dans les triangles BOA et BO_2B' :

$$\left.\begin{array}{l}(OO_1) \parallel (O_2B') \\ BO_2 = O_2B'\end{array}\right\} \Rightarrow BO = OA$$

CQFD

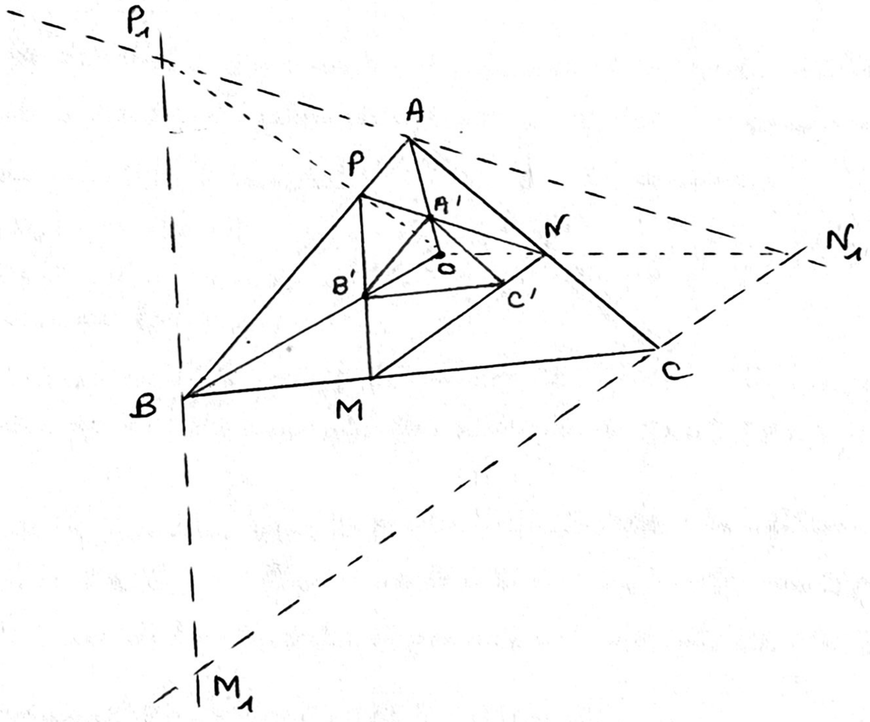
Triangles homothétiques :

Trouver un triangle A'B'C' inscrit dans MNP dont les côtés soient parallèles à ceux de ABC (figure ci-contre)



Analyse : supposons le pb résolu, et notons O l'intersection de (AA') et (BB').

* Soit h l'homothétie de centre O transformant A' en A et B' en B.



$\left\{ \begin{array}{l} h(C') \text{ sera sur la } \parallel \text{ à } (A'C') \text{ passant par } A \text{, soit } h(C') \subset (AC) \\ h(C') \quad " \quad \parallel \text{ à } (B'C') \quad " \quad B \text{, soit } h(C') \subset (BC) \end{array} \right. \Rightarrow h(C') = C$

Les triangles A'B'C' et ABC sont donc homothétiques.

* Notons $P_1 = h(P)$, $N_1 = h(N)$ et $M_1 = h(M)$.

$\left\{ \begin{array}{l} P \in (A'N) \Rightarrow P_1 \in (AN_1) \Rightarrow A, N_1, P_1 \text{ alignés} \\ \ldots \\ \ldots \end{array} \right.$

(ref. [M] Sortais 88, 7 p 103)

de plus $\begin{cases} (P_1N_1) \parallel (PN) \\ \dots \\ \dots \end{cases}$

(*) donc $M_1N_1P_1$ sera le triangle dont les côtés passent par les points A, B et C et sont parallèles à ceux du triangle MNP.

<u>Synthèse</u> : on construit le triangle $M_1N_1P_1$ vérifiant (*).
(P_1P) coupe (NN_1) en O, puis (OA) coupe (PN) en A', etc ...

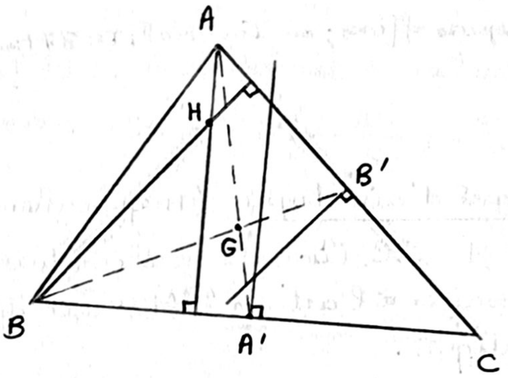
① Preuve rapide de la relation d'Euler :

Mq l'homothétie de centre G, le cdg du triangle ABC, et de rapport −2, transforme les médiatrices des côtés en hauteurs. En déduire :

a) que les hauteurs d'un triangle concourent en un pt H appelé orthocentre du triangle.

b) la rel. d'Euler $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ liant le centre du cercle circonscrit O, le cdg G et l'orth. H.

(réf. Terracher 92 I p139) [T] Triangles / U



② Droite et cercle d'Euler :

ABC est un triangle de cdg et d'orthocentre H. On note A', B', C' les milieux des côtés, 𝒞 le cercle circonscrit à ABC, 𝒞' celui circonscrit à A'B'C', O et ω les centres de 𝒞 et 𝒞'.

a) Exhiber une homothétie h transformant 𝒞 en 𝒞'. En déduire :

* G, H, O, ω alignés (c'est la dte d'Euler)
* $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (relation d'Euler)
* ω milieu de [OH].

b) Notons h' la seconde homothétie transformant 𝒞 en 𝒞'. Trouver son rapport, puis déduire son centre de a). Déduire que les milieux de [AH], [BH], [CH] appartiennent à 𝒞'

c) Soit P le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. En utilisant le trapèze rectangle HPA'O, montrer que P ∈ 𝒞'. (C'est le cercle d'Euler ou "cercle des 9 points")

d) Mq les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés de ABC sont sur 𝒞.

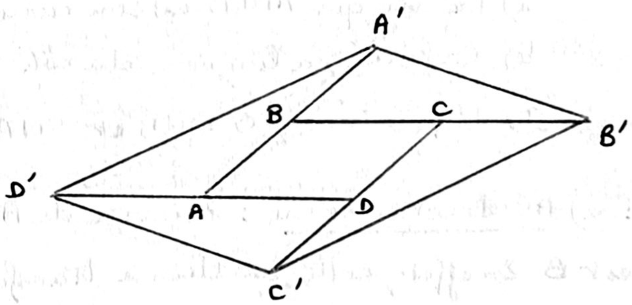
(inspiré du TC Transmath 87 t2, ex 6 p173) [T] Cercles

③ ABCD est un parallélogramme.

A', B', C', D' sont les sym. de A, B, C, D par rapport à B, C, D, A.

Que dire du quad. A'B'C'D' ?

Si ABCD est un carré, peut-on prouver que A'B'C'D' en est un ?



([E] "Une figure intéressante..." / Repère IREM n°1 : art. de Jean Houdebine)

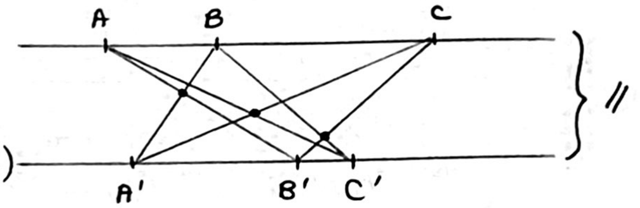
④ Preuve du Th. de Ménélaüs par les homothéties – translations.

([C] Espaces affines)

⑤ Th. de Pappus dans le cas particulier où D//D'.

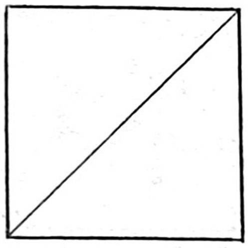
Prouver l'alignement en utilisant les homothéties - translations

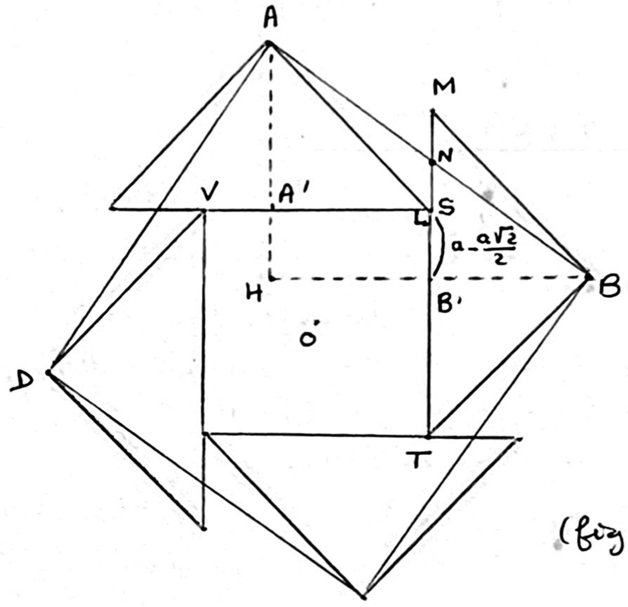
(IT Espaces affines ; ou Transmath TC 87 tome 2 : TP3 p194)



⑥ Carré d'aire triple (Hocquenghem 80 p146)

Puisé dans le livre du mathématicien arabe Abul-Wafa : "Constructions géométriques nécessaires à l'artisan". Il s'agit de fabriquer un carré à partir de 3 carrés identiques.





(fig. 1)

Il en découpe 2 suivant la diagonale, et les dispose autour du 1er carré (fig. 1). Le carré ABCD répond à la question, et on l'obtient aisément en découpant un triangle de chacun des 4 triangles déjà obtenus et en le plaçant convenablement. Ce pb historique offre des développements intéressants dès la 3ème :

a) Prouver que ABCD est un carré

b) Calculer la longueur du côté AB. Construire $\sqrt{3}$ à la règle et au compas.

c) Mq les triangles MNB et SNA sont symétriques /à N.

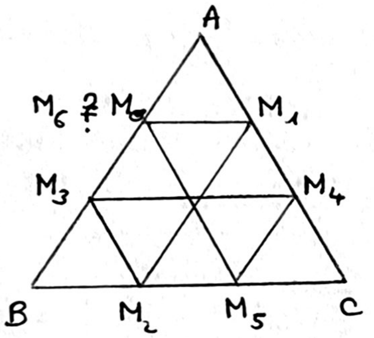
Sol : a) ABCD est un carré : l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 90° est B. En effet, cette rotation r transforme S en T, et la dte (SA) perpendiculaire à (OS) en la perp. à (OT) en T ie (TB). r transforme aussi A' en B' (car SA' = TB' et [SV] est transformée en [TS]) donc transformera la perpendiculaire à (SV) en A', ie (A'A), en la perp. à (TS) en B', ie (BB'). Ainsi $r(A) \in (TB) \cap (B'B) \Rightarrow r(A) = B$.

b) Si a est le côté d'un carré du départ, l'aire de ABCD est 3a donc $AB = a\sqrt{3}$
On peut aussi utiliser Pythagore dans AHB.

c) AN = NB d'après Thalès (utiliser (AH) // (B'S)). Thalès permet le calcul de NS : $\frac{NB'}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow NB' = \frac{a}{2} \Rightarrow NS = NB' - SB' = \frac{a}{2} - \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$

Donc $MN = MT - NT = a\sqrt{2} - (NS + SB' + B'T) = a\sqrt{2} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} + a - \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$. On a bien MN = NS. CQFD

⑦ Configuration de "Thomsen" ou tourniquette...
(réf. "Questions de problématique et de méthodologie", Aline Robert, ex. d'enseignement de licence en form. cont, Recherches en Didactiques des Mathématiques Vol. 12/2.3, 1992)



$M_0 \in [AB]$, la parallèle à (BC) passant par M_0 coupe [AC] en M_1, ... et ainsi de suite en traçant des // aux côtés en tournant dans le m̂ sens.
Mq $M_0 = M_6$.
Est-ce que cela peut s'arrêter avant.

Sol : Th. Thalès, $\frac{\overline{BM_6}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BM_5}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM_4}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM_3}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BM_0}}{\overline{BA}}$ donc $M_6 = M_0$

La const. s'arrête avant ssi $M_0 = M_3$, ie $\frac{\overline{BM_0}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BM_3}}{\overline{BA}}$, comme $\frac{\overline{BM_3}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BM_2}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM_0}}{\overline{AB}}$, cela équivaut à $\overline{BM_0} = \overline{M_0A}$, ie M_0 milieu de [AB]. CQFD

- Généralisations : 1) Que dire des pts M_0 et M_3 ? (On a $\frac{\overline{AM_3}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BM_0}}{\overline{BA}} \Rightarrow \overline{AM_3} = \overline{M_0B}$ $\Rightarrow \overline{IM_3} = \overline{M_0I}$ où I milieu de [AB]. Donc M_0 et M_3 sont sym. /à I)

  2) Remplacer le triangle ABC par un quadrilatère, un polygone à n côtés, et enfin un cercle.

- Contexte : Abordable en collège.

4ème : Déterminer la largeur d'une rivière Obj. : utilisation de la sym. centrale à des fins pratiques.

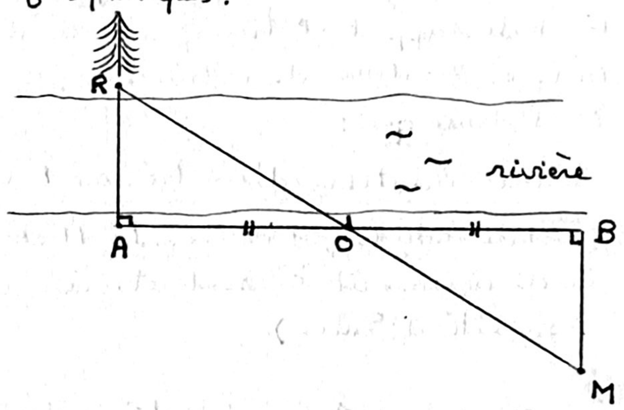
On a : O milieu de [AB]

R, O, M alignés

$\widehat{RAO} = \widehat{OBM} = 90°$

Montrer que BM = RA.

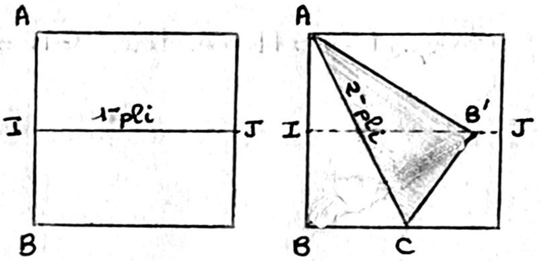
(réf. Guide de Survie de l'Armée Américaine)



4ème : Pliage (APMEP n° 382)

Voici un pliage en 2 étapes :

On part d'une feuille carrée pour obtenir, à la fin de la 2e étape, plusieurs angles qui semblent avoir 60°. Choisir l'un d'eux et démontrer qu'il a bien 60°.



preuve : Utiliser l'axe de symétrie (AC).

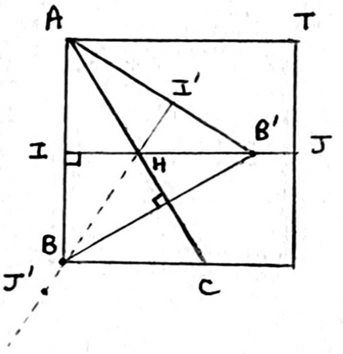


figure complétée.

Soient I' le sym. de I /à (AC)

J' " J /à (AC)

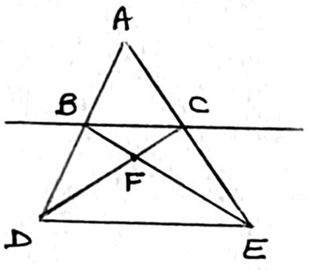
(AC) est la médiatrice de [BB'], donc AB = AB' (1)

et $\widehat{BAH} = \widehat{HAB'}$ (3)

I milieu de [AB] ⇒ I' milieu de [AB'], et en fait, par symétrie, (I'B) sera la symétrique de (IB'). Comme (IB') = (IJ) est médiatrice de [AB], on en déduit que (I'B) = (I'J') est la médiatrice de [AB'], d'où BA = BB'. (2)

(1) et (2) entraînent que ABB' est équilatéral d'où $\widehat{BAB'} = 60°$. Compte tenu de (3) : $\widehat{BAH} = 30°$ d'où $\widehat{CAT} = 60°$. CQFD

Un classique : Si (BC) // (DE), mq les milieux de [BC] et [DE] sont alignés avec A et F. Réciproque ?

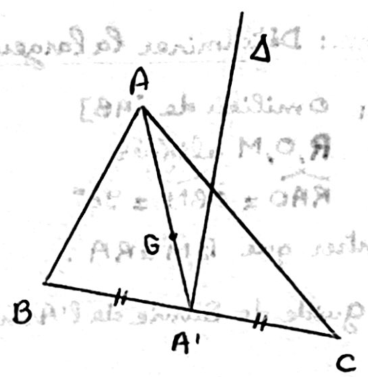


Sol : L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AD}{AB}$ transforme B en D et C en E, donc le milieu de [BC] en le milieu de [DE]... Réciproque triviale.

Term. : Droite d'Euler

Soit G le cdg du tri. ABC. Mq l'homothétie de centre G et de rapport -2 transforme les médiatrices du tri. ABC en hauteurs de ce triangle.
En déduire que :

1) les hauteurs d'un tri. sont concourantes
2) le cdg G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (égalité d'Euler)



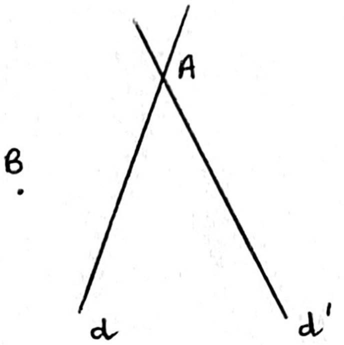
preuve : Soit Δ la médiatrice de [BC]. $h_{G,-2}(\Delta)$ est une dte passant par $h_{G,-2}(A') = A$ et parallèle à Δ, donc perpendiculaire à [BC] : c'est donc la hauteur issue de A.
De $h_{G,-2}(O) = H$ on tire $\vec{GH} = -2\vec{GO}$, d'où $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. CQFD

(Classe de 4ème)

Tracer I et C tels que :

$$\begin{cases} I \in d \\ C \in d' \\ I \text{ milieu de } [BC] \end{cases}$$

Vérifier qu'il n'existe qu'une seule solution.



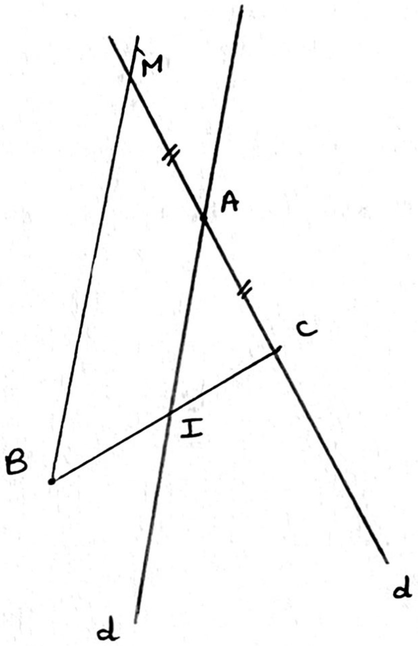
1re sol.

Si I et C répondent à la question, la parallèle à d passant par B coupera d' en M symétrique de C /à A.

D'où l'unicité de la solution.

Cette solution convient : on trace la // à d passant par B, qui coupe d' en M. C est le sym. de M /à A. (BC) coupe d en I.

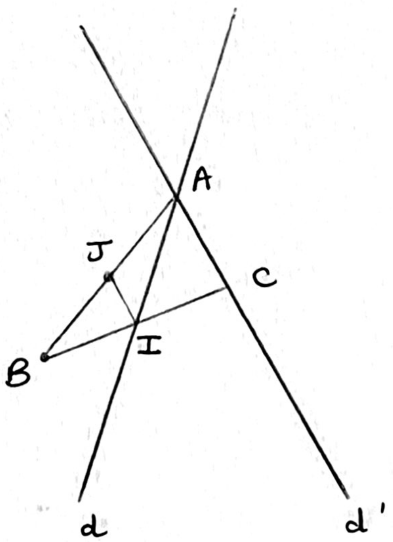
Le Th ddm prouve que I est le milieu de [BC].



2e sol.

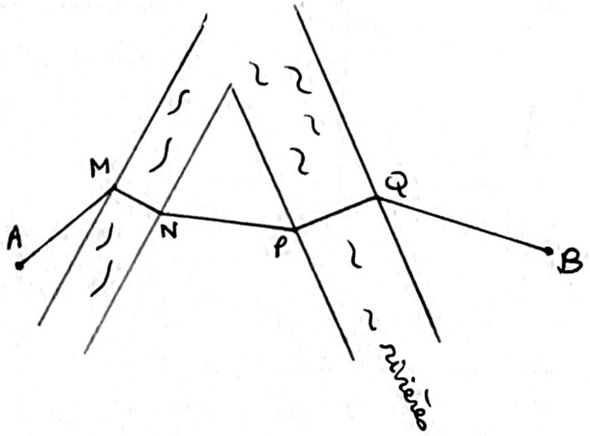
On trace le milieu J de [AB], puis le projeté I de J sur d parallèlement à d'.

D'où $C \in (BI) \cap d'$

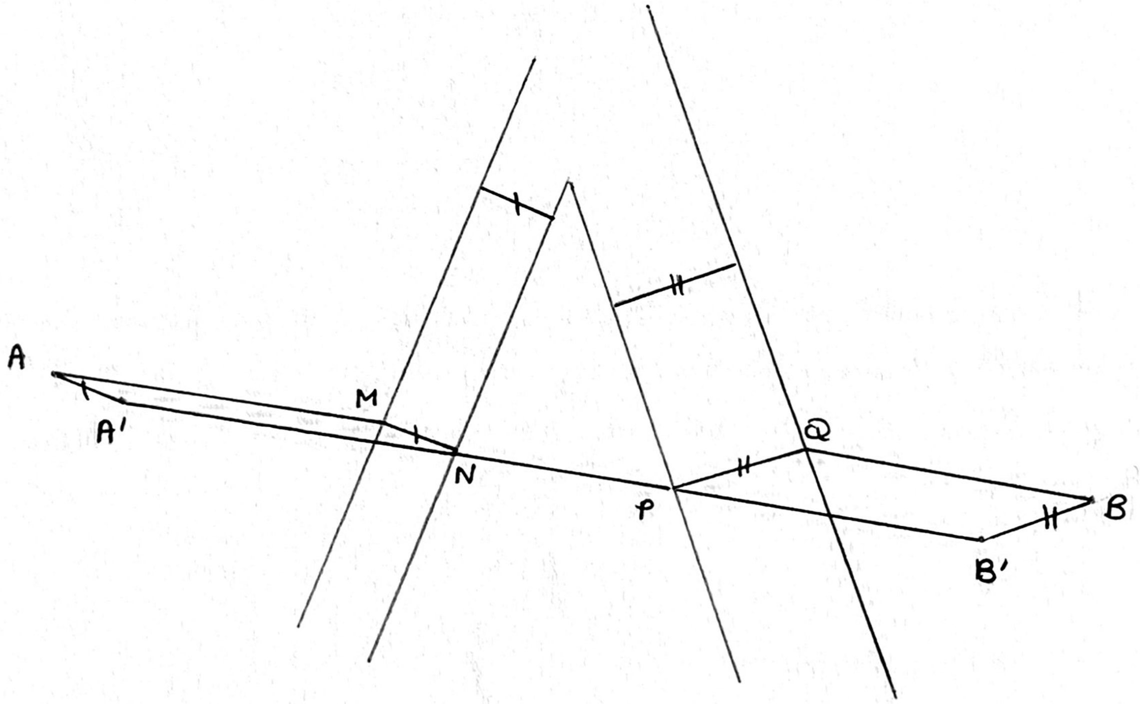


Problème des 2 ponts :

Où doit-on construire les 2 ponts (perpendiculaires aux rives) pour relier les villes A et B par un trajet de longueur minimale ?

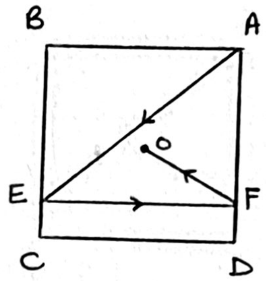


La direction de MN étant toujours la même, et sa longueur aussi, on a l'idée de tracer le représentant du vecteur $\overrightarrow{MN}$ d'origine A, et de faire de m̂ avec B :

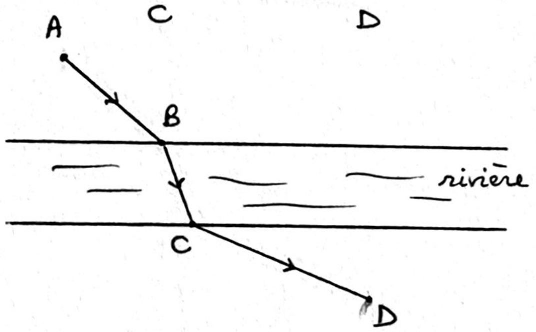


(A'B') coupe les berges en N et P, d'où la solution AMNPQB.

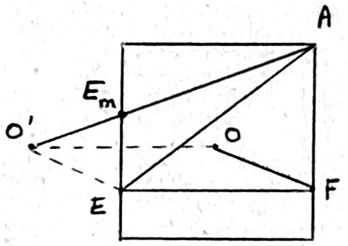
① Un nageur, dans une piscine carrée, veut minimiser la distance AE + EF + FO et atteindre le centre O de la piscine. Où placer E sur [BC] ?
(Ind. penser à une translation)



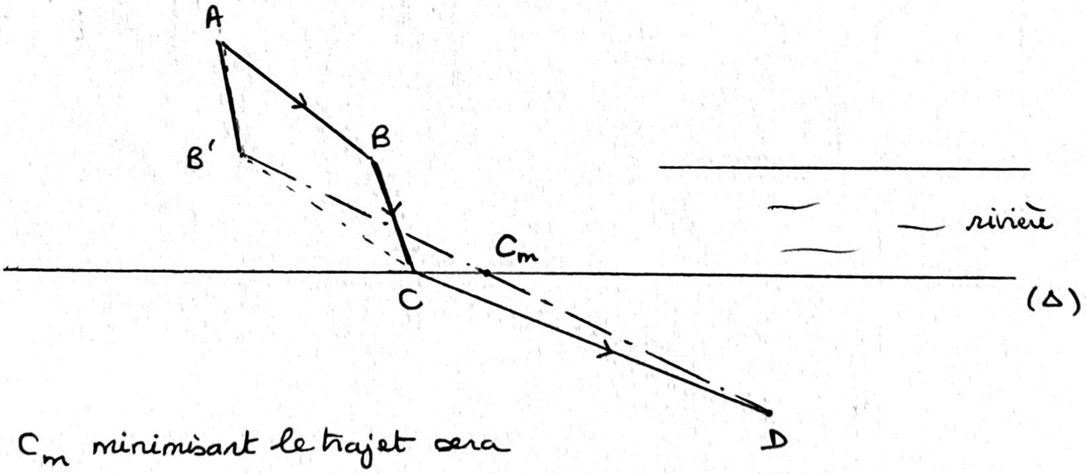
② Minimiser la distance AB + BC + CD sachant que :
a) (BC) conserve toujours la m̂ direction
b) A et D sont fixés une fois pour toute.



① La distance EF est invariante quelque soit le chemin. Il s'agit donc de minimiser AE + FO, ou encore AE + EO' (où O' est le translaté de O suivant le vecteur $\vec{FE} = \vec{AB}$.
On en déduit le point E_m cherché :



② Encore une fois, la distance BC est indépendante du chemin considéré, on peut donc translater $\vec{BC}$ et dessiner son représentant d'origine A. Oublions l'existence de la rivière. Les chemins : AB + BC + CD et AB' + B'C + CD ont m̂ longueur.



Le point C_m minimisant le trajet sera donc à l'intersection de (B'D) et (Δ).

D'où B_m et le chemin.